18. Общо уравнение на равнина в пространството

Нека $K = Oxy$ е афинна координатна система.

Теорема.1: Всяка равнина π има спрямо координатната система K уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.
Обратното: Всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ е уравнение спрямо K на някоя равнина π.
Доказателство:
Нека т.$P_0(x_0, y_0, z_0)$ е точка от π и векторите $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ са компланарни с π и не са колинеарни помежду си. Нека т.$P(x, y, z) \in \pi$, тогава $\overrightarrow{P_0P}, v_1, v_2$ са компланарни.
От условието за компланарност следва:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е.

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y - y_0) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Нека да означим с $A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ и $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.
Следователно от $P(x, y, z) \in \pi$ следва

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0, Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0 = 0, Ax+By+Cz+D = 0, \tag{2}$$

т.е. π има уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.
Остана да докажем, че $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Да допуснем противното, т.е. $(A, B, C) = (0, 0,)$. В такъв случай минорите на натрицата $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ са равни на нула, т.е. ранга на матрицата е по-малък или равен на 1. Това означава, че векторите v_1 и v_2 са колинеарни, което е противоречие. Следователно $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.
Сега ще докажем и обратната посока:

Тъй като $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, то уравнението

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

има решение(например ако $A \neq 0$, то едно решение е $x = -\frac{D}{A}, y = 0, z = 0$).
Нека (x_0, y_0, z_0) е едно решение на уравнение (2), тогава $D = Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Нека т.P е с координати (x_0, y_0, z_0). От първата част на доказателството знаем, че е достатъчно да намерим некоолинеарни вектори $v_1(a_1, b_1, c_1)$, $v_2(a_2, b_2, c_2)$, такива че

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Без ограничение на общноста, можем да приемем $A \neq 0$. Нека вземем $b_1 = A, c_2 = 1, b_2 = 0, c_1 = 0, a_1 = -B, a_2 = -\frac{C}{A}$. Непосредствено проверяваме, че горните равенства са изпълнени. Така получихме векторите $v_1(-B, A, 0)$ и $v_2(-\frac{C}{A}, 0, 1)$, тези два вектора са неколинеарни.
Така т.P_0, v_1, v_2 задават равнина π и уравнението и е точно:

$$\pi : (x - x_0) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y - y_0) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

т.е. $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$ или $Ax + By + Cz + D = 0$.

Дефиниция: Нека π е равнина. Уравнение на π от вида $Ax + By + Cz + D = 0$

Дефиниция: Нека π е равнина. Уравнение на π от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ се нарича общо уравнение на K спрямо K.

Твърдение.1: Ако т.$P_0(x_0, y_0, z_0)0$ и векторите $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ са неколинеарни, то равнината π, поределена от P_0, v_1, v_2 има общо уравнение

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Twърдение.2: Ако π е равнина определена от три неколинеарни точки $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, то π има общо уравнение:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & {}_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

или еквивалентно

$$\pi : \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

Доказателство: Нека т.$P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{P_1P_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, следователно от Тв.1, π се определя от тях.
Също така

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1^6 \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & {}_3 - z_1 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Твърдение.3: Нека равнината π има общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава векторът $v(a, b, c)$ е компланарен с π, тогава и само тогава, когато $Aa + Bb + Cc = 0$.
Доказателство: Нека $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, тогава $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.
Нека т.$P_1(x_1, y_1, z_1)$, така че $\overrightarrow{P_0P_1} = u$. Тогава векторът u е компланарен с π, тогава и само тогава, когато $P_1 \in \pi$.
$\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, следва че $x_1 = x_0 + a$, $y_1 = y_0 + b$, $z_1 = z_0 + a$.
$P_1 \in \pi$. тогава и само тогава, когато $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. $A(x_0 +) + B(y_0 + b) + C(z_0 + b) + D = 0$ или

$$(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + Aa + Bb + Cc = 0, \tag{9}$$

т.е. $Aa + Bb + Cc = 0$.

Отрезово уравнение на равнина. Нека π е равнина, която не минава през началото на координатната система и не е успоредна на координатните оси. Нека π да пресича Ox в т.$(, 0, 0)$, Oy в т.$B(0, b, 0)$ и Oz в $C(0, 0, c)$. Тогава π има уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Това уравнение се нарича отрезово уравнение на π.
Забележка: $a, b, c \neq 0$, защото $A, B, C \neq 0$. Също така координатите на A, B, C удовлетворяват уравнението $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ и съответно това е общо уравнение на π.

Декартово уравнение на равнина.